lianxh.cn

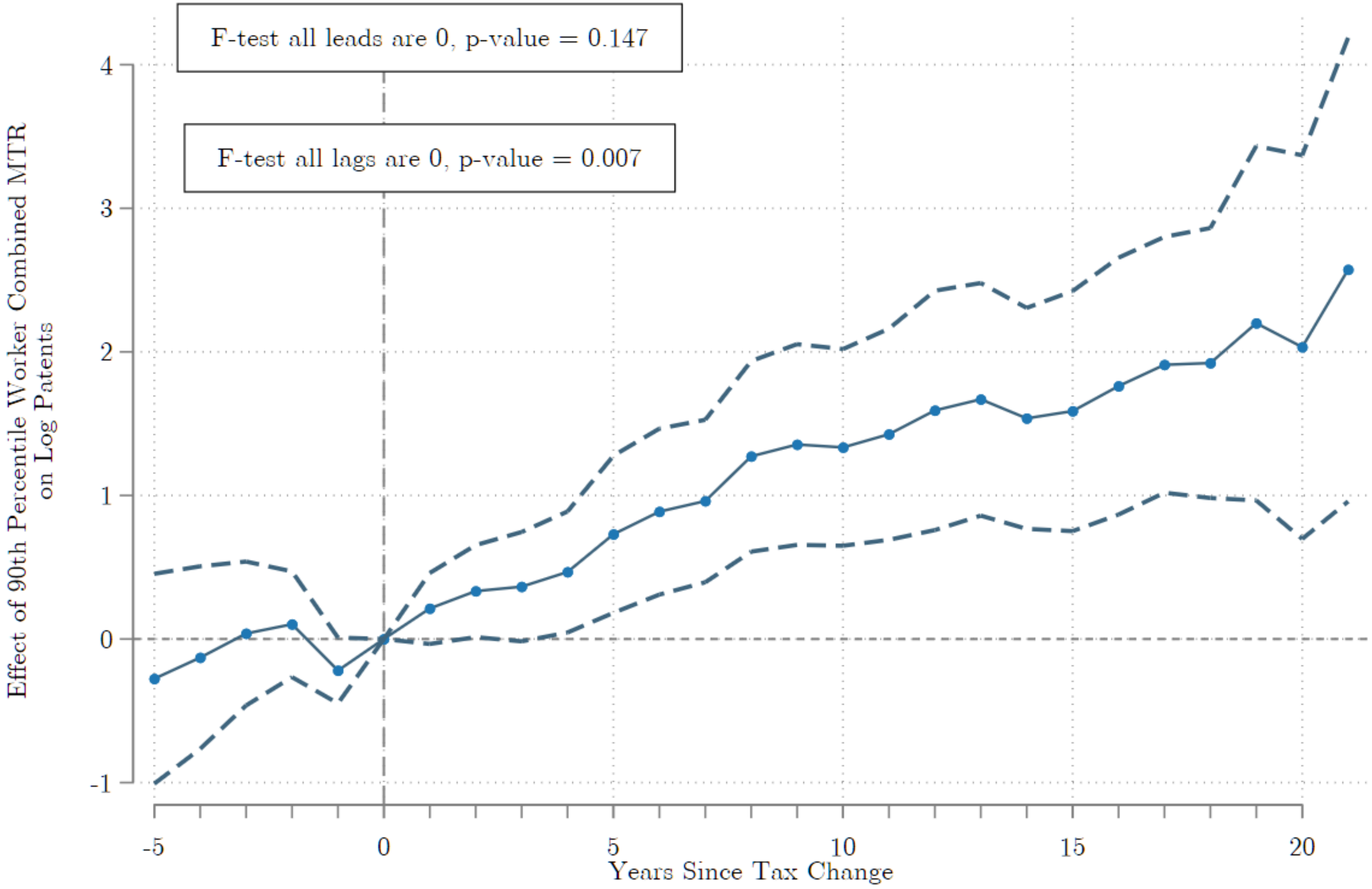
> `. lianxh ARDL` // 相关资料

ARDL：自相关分布滞后模型

政策长期效应估计

连玉君 (中山大学)

arlionn@163.com

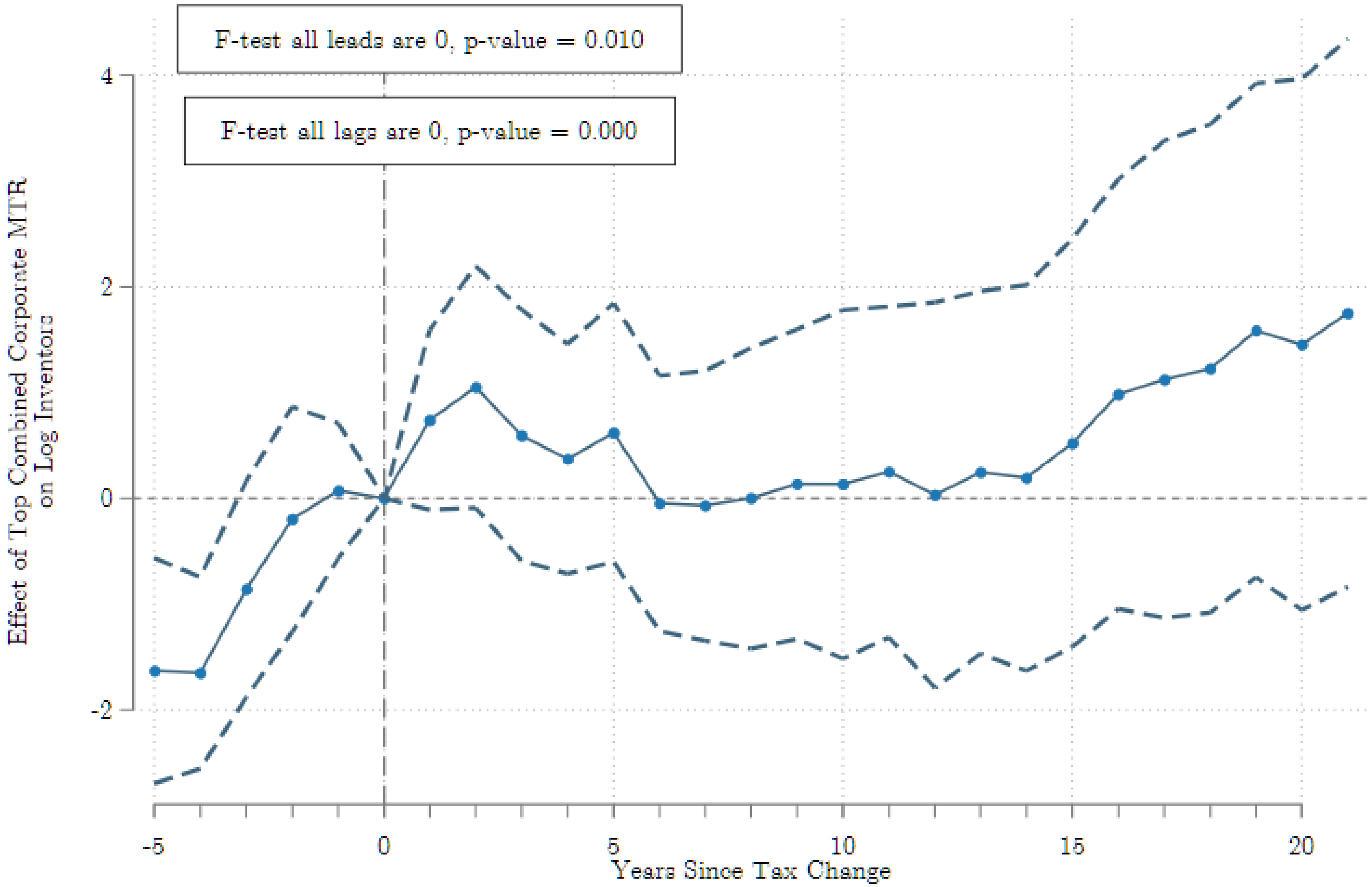


个人所得税变动对创新行为的长期影响

- x: $t - t_0$
- y:

$$e = \frac{\Delta ln(Pat)}{\Delta ln(Tax)}$$

> Source: Akcigit, et al. (2022, PDF) **QJE**


F-test all leads are 0, p-value = 0.010
F-test all lags are 0, p-value = 0.000
Effect of Top Combined Corporate MTR on Log Inventors
Years Since Tax Change
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20

公司所得税

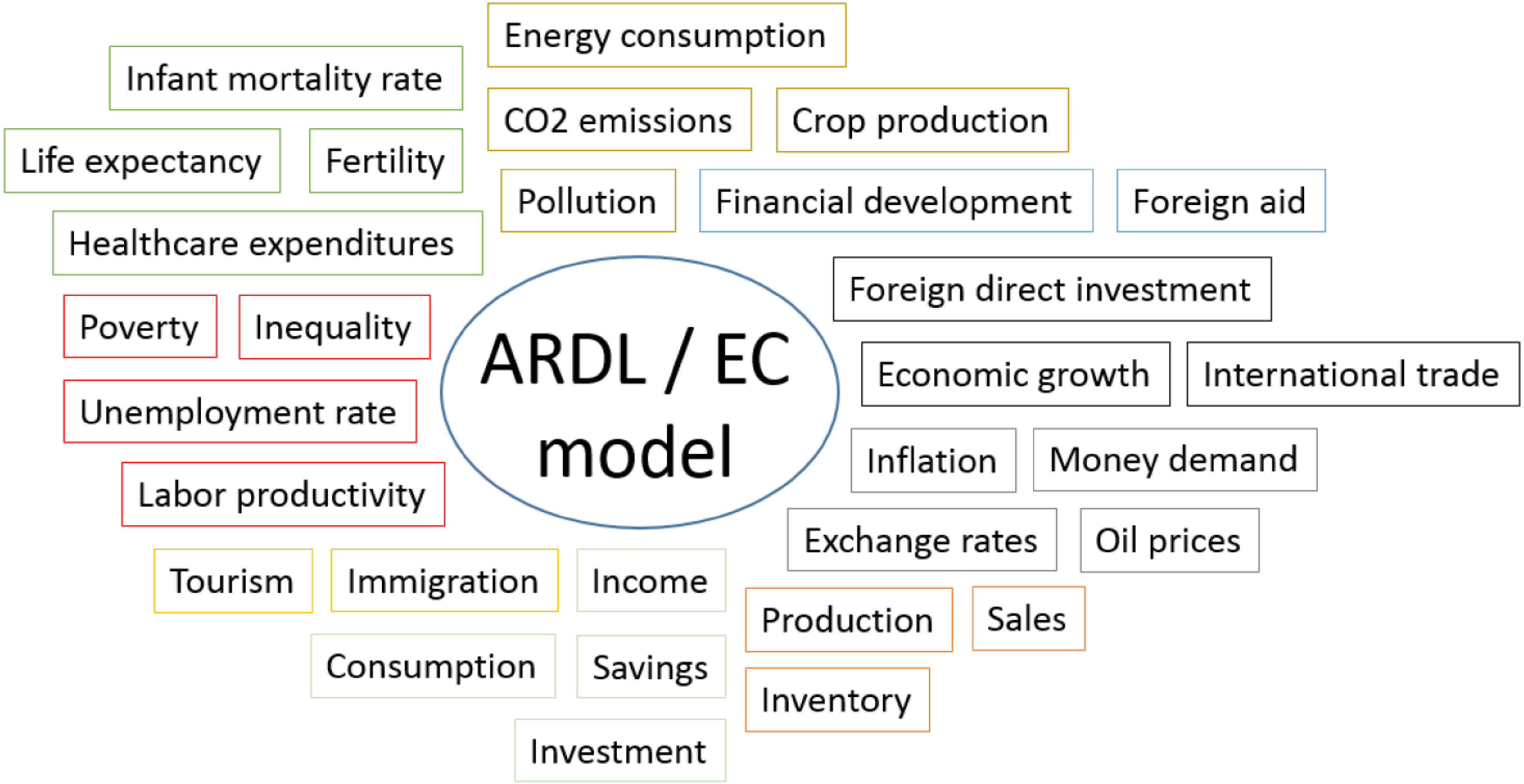
提纲

- ARDL 模型简介
- 长期效应 v.s. 短期效应
- ARDL 的理论基础
  - 部分调整模型
  - 理性预期模型
- 考虑共同相关因素的 ARDL 模型
- 应用实例

简介

- 微观
  - 消费：持有收入假说
  - 投资：R&D, M&A
  - 资本结构：权衡理论 + 调整成本
- 宏观
  - 货币政策、房地产刺激政策
  - 目标通胀率 / 目标失业率 → 部分调整 + 粘性
- 估计长期效应
- 挑战：
  - 模型设定的理论基础？
  - 空间相关、共同因素 (common factor)

ARDL 的应用



Energy consumption
Infant mortality rate
CO2 emissions
Crop production
Life expectancy
Fertility
Pollution
Financial development
Foreign aid
Healthcare expenditures
Foreign direct investment
Poverty
Inequality
ARDL / EC model
Economic growth
International trade
Unemployment rate
Inflation
Money demand
Labor productivity
Exchange rates
Oil prices
Tourism
Immigration
Income
Production
Sales
Consumption
Savings
Inventory
Investment

模型设定

- DL 模型
- ARDL 模型
- Panel ARDL 模型
- 异质性共同相关Panel ARDL 模型

DL 模型：分布滞后模型 (distributed lag model)

$$y_t = \alpha + x'_t\beta_0 + x'_{t-1}\beta_1 + x'_{t-2}\beta_2 + \cdots + x'_{t-q}\beta_q + e_t.$$

- 假设：某些解释变量的多期滞后项都对被解释变量有影响。
- 例如，投资行为
  - x_t: 第 t 期的新增投资, y_t: 公司价值。
  - DL 原因：有些投资项目需要 3-5 年甚至更长的时间才能完成 (如并购后整合、新药研发) → x 对 y 的影响具有**滞后性和累积性**。

DL 模型：分布滞后模型 (distributed lag model)

$$y_t = \alpha + x_t'\beta_0 + x_{t-1}'\beta_1 + x_{t-2}'\beta_2 + \cdots + x_{t-q}'\beta_q + e_t \quad (1)$$

系数的含义有两种解释:

- 短期影响：如 β_1 反应的是 x_{t-1} 对 y_t 的影响 (控制其他因素)
- 长期影响 (长期乘数)：$\mathrm{LM} = \beta_0 + \cdots + \beta_q$
    - 反映了 x 对 y 的**累积影响**

ARDL 模型 (AutoRegressive Distributed Lag model)

$$y_t = \alpha + \lambda_1 y_{t-1} + \cdots + \lambda_p y_{t-p} + x'_{t-1}\beta_1 + \cdots + x'_{t-q}\beta_q + e_t \quad (2)$$

- 文献中应用更为普遍。`findit ardl`
- 在模型 (1) 中加入 y_{t-s}, 以反映 y_t 的自回归特征 (即, y_t 具有一定的延续性, 会受到其滞后项的影响

$\mathrm{ARDL}(p, q, \ldots, q)$

$$y_t = c_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} \beta_i' \mathbf{x}_{t-i} + u_t,$$

- $p \geq 1, q \geq 0$
- 此处假设所有解释变量都具有相同的滞后期数
- 更一般化的设定中，每个解释变量可以有不同的滞后期数

Panel ARDL

在面板数据中，可以进一步加入固定效应。例如，Panel-ARDL $(1,1)$ 模型设定为：

$$y_{i,t} = \alpha_i + \lambda y_{i,t-1} + \beta_0 x_{i,t} + \beta_1 x_{i,t-1} + u_{i,t}$$

也可以加入：

- 时间固定效应 λ_t，以及 λ_t 与其他变量的交乘项
- 时间趋势项 $Trend_t$，以及 $Trend_t$ 与其他变量的交乘项
- 其他控制变量 $(\mathbf{w}_{it})$，以及它们高阶滞后项。

Panel ARDL：实例 1

Dell, Jones, and Olken (2012, PDF, AEJ) 在研究气候变化与经济增长关系时，设定了如下模型 (参见 Appendix II, A1.5 式):

$$\Delta y_{it} = a_i + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell \Delta y_{i,t-\ell} + \sum_{\ell=0}^{p+1} \beta_\ell T_{it-\ell} + \varepsilon_{it}.$$

- Δy_{it} 是国家 i 在 t 时点的实际人均 GDP 的对数，
- a_i 是国家层面的固定效应，
- T_{it} 是国家 i 在 t 时点的人口加权平均气温。

Panel ARDL：实例 2

- Burke et al. (2015, PDF), Kalkuhl and Wenz (2020) 等都对此模型进行了扩展。
- Kahn et al. (2021, PDF) 的设定如下：

$$\Delta y_{it}=a_i+\sum_{\ell=1}^{p}\lambda_\ell \Delta y_{i,t-\ell}+\sum_{\ell=0}^{p}\boldsymbol{\beta}_\ell^{\prime}\Delta \mathbf{x}_{i,t-\ell}+\sum_{\ell=0}^{p}\boldsymbol{\theta}_\ell^{\prime}\Delta \mathbf{x}_{i,t-\ell}\times \mathbb{I}(\cdot)+\varepsilon_{it}$$

  - $\Delta \mathbf{x}_{i,t}$ 表示气候变化，
  - $\mathbb{I}(\cdot)$ 是各类反应国家特征的虚拟变量，如低收入、处于热带地区等。

异质性共同相关Panel ARDL 模型

- 变化 1：允许异质性系数：$\lambda \rightarrow \lambda_i, \beta \rightarrow \beta_i$
- 变化 2：引入共同因子 (common factors)：$\mathbf{f}_t = [f_{1t}, f_{2t}, \cdots, f_{mt}]$

例如, Stata 中的 `xtdcce2` 命令，见 Ditzen (2021, PDF)，对应的模型设定为：

$$
\begin{aligned}
y_{i,t} &= \alpha_i + \lambda_i y_{i,t-1} + \beta_{0,i} x_{i,t} + \beta_{1,i} x_{i,t-1} + u_{i,t} \\
u_{i,t} &= \sum_{l=1}^{m} \rho_{y,i,l} f_{t,l} + e_{i,t} \\
x_{i,t} &= \sum_{l=1}^{m} \rho_{x,i,l} f_{t,l} + \xi_{i,t}
\end{aligned}
$$

其中, $i = 1, \ldots, N, t = 1, \ldots, T_i$ 。

长期效应与短期效应

- 在 ARDL 模型中, 变量之间存在很强的动态关系：
  - x 的当期值和滞后项，以及 y 的滞后项都会对 y_t 产生影响。
- 这些影响可以归结为「**短期效应**」 和「**长期效应**」两类
  - **长期效应** 反映了 x 和 y 之间的长期均衡关系。

短期效应

这里, 先以最简单的 ARDL $(1,1)$ 模型为例进行说明:

$$y_t = \alpha + \lambda y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + u_t$$

短期效应 定义为:

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \beta_0, \quad \frac{\partial y_t}{\partial x_{t-1}} = \beta_1$$

- 以 β_1 为例, 短期关系反映的是在控制其他因素 (如与 x_{t-1} 有较强相关性 的 x_t, 以及 y_{t-1}) 的情况下, x_{t-1} 对 y_t 的条件边际影响。

长期效应：$\mathrm{ARDL}(1,1)$ 模型

长期效应反映的是 x 和 y 的**长期均衡值之间的关系。**

$$y_t=\alpha+\lambda y_{t-1}+\beta_0 x_t+\beta_1 x_{t-1}+u_t$$

把式 中 x 和 y 的当期值和滞后项统一替换为 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ (二者的长期均衡值), 即

$$\tilde{y}(1-\lambda)=\alpha+\left(\beta_0+\beta_1\right)\tilde{x}$$

求解 $\tilde{y}$ 可得:

$$\tilde{y}=\frac{\alpha}{1-\lambda}+\frac{\beta_0+\beta_1}{1-\lambda}\tilde{x}$$

因此, x 单位变化对 y 的**长期影响**由下式给出

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}}=\frac{\beta_0+\beta_1}{1-\lambda}$$

长期效应：$\mathrm{ARDL}(p,q)$ 模型

$$y_t = \alpha + \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_\ell y_{t-\ell} + \sum_{\ell=0}^{q} \beta_\ell x_{t-\ell} + \varepsilon_t.$$

长期乘数 long-run multiplier (LM) 定义为:

$$\mathrm{LM} = \frac{\beta_0 + \cdots + \beta_q}{1 - \lambda_1 - \cdots - \lambda_p}$$

- LM 是模型参数的非线性函数
- 对于面板数据模型而言, LM 的定义和计算方法并没有本质差别
- 如果选择的滞后阶 p 和 q 足够大, ARDL 模型的误差项可以近似为白噪声, 此时, 模型可以解释变量之间的动态均衡关系, 亦可用传统方法计算标准误。

时间趋势

时间趋势：简介

许多经济时间序列的均值都是随时间变化的。我们可以使用如下模型 刻画这一特征：

$$y_t = \mathrm{Trend}_t + u_t$$

这里, y_t 包含两个部分：时间趋势项 Trend_t 和随机扰动项 u_t 。后者可以设定为线性过程或自回归过程:

$$\alpha(\mathrm{L}) u_t = e_t$$

时间趋势项则常被设定为时间变量 (t) 的线性模型:

$$\mathrm{Trend}_t = \beta_0 + \beta_1 t$$

或二次函数形式 (以反映时间趋势的非线性特征):

$$\mathrm{Trend}_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 .$$

时间趋势项

在 ARDL (p, q) 模型中加入时间趋势项是文献中惯用的做法：

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + x'_{t-1}\beta_1 + \cdots + x'_{t-q}\beta_q + \gamma t + e_t$$

- 无论把时间趋势项设定成何种形式，本质上都是一种近似。
- 可以通过各种灵活的设定，让其尽可能反映数据本身的特征。比如，
  - 加入高阶项 $t^3, t^4, \cdots,$
  - 或允许 β_1 和 β_2 具有异质性，如随个体发生变化，即 β_{1i}, β_{2i}。

时间趋势项：实例 1

- Burke et al. (2015, PDF)，气候变化 (T_{it}) 与经济增长 (Δy_{it})：

$$\Delta y_{it}=\alpha_i+\delta_t+\alpha T_{it}+\beta T_{it}^2+\gamma_i t+\phi_i t^2+\varepsilon_{it}$$

- y_{it} 表示国家 i 在第 t 年的人均 GDP，
- T_{it} 表示气温，
- α_i 为国家层面的固定效应，
- δ_t 为时间效应。
- $\gamma_i t$ 和 $\phi_i t^2$ 分别是线性时间趋势一次和二次项。

> 注意，这里采用了非常灵活的设定，允许每个国家有不同的时间趋势，因为参数 γ_i 和 ϕ_i 都可以随国家而变化。

时间趋势项：实例 2

- Kalkuhl and Wenz (2020, PDF) 在 Burke et al. (2015, PDF) 的设定中进一步增加了两项：ΔT_{it} 及交乘项 $T_{it} \times \Delta T_{it}$，以便捕捉短期气温变化产生的影响:

$$\Delta y_{it} = a_i + \delta_t + \lambda \Delta T_{it} + \psi T_{it} \times \Delta T_{it} + \alpha T_{it} + \beta T_{it}^2 + \gamma_i t + \phi_i t^2 + \varepsilon_{it}$$

- Note：时间趋势项可以作为 ARDL 模型设定中的控制变量，有些时候，它本身就是研究的重点。

ARDL 模型的理论基础

ARDL 模型是「简约式」而非「结构式」模型设定, 但其背后有很强的经济含义。

比如, 可以从经济学中由来已久的两个重要模型推导出 ARDL 的设定形式:

- 部分调整模型
- 理性预期模型

部分调整模型 (Partial adjustment model)

令 y_t^* 为决策变量 y_t 的预期值 (如, 目标体重、目标负债率、目标汇 率、目标通胀率等), 并假设 y_t^* 与 x_t 存在如下关系:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t$$

假设 y_t 基于如下一阶「**部分调整过程**」向其预期水平调整:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right),$$

其中, λ 为调整系数:

- 如果 $\lambda = 0$, 则不会进行调整
- 如果 $\lambda = 1$, 则调整 可以瞬时完成
- 通常而言, $0 < \lambda < 1$

部分调整模型 $\longrightarrow$ ARDL

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t \qquad (1)$$

假设 y_t 基于如下一阶「**部分调整过程**」向其预期水平调整:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right) \qquad (2)$$

用 (1) 代替 y_t^*, 可得

$$\begin{aligned} y_t &= \lambda\alpha + (1-\lambda)y_{t-1} + \lambda\beta x_t + \lambda u_t \\ &= \alpha_0 + \theta y_{t-1} + \gamma x_t + v_t \end{aligned} \qquad (3)$$

显然, 这是一个 $ARDL(1,0)$ 模型。

部分调整模型：扩展

目标值的设定：

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t \qquad (1)$$

- **隐含假设：** 公司基于当期的 x_t 信息来确定 y_t^*

扩展 1： 考虑信息获取的滞后性，则将 y_t^* 设定成如下形式或许更为合理：

$$y_t^* = \alpha + \beta_1 x_{t-1}$$

此时, (3) 式将转变为一个 $\mathrm{ARDL}(1,1)$ 模型。

扩展 2： 当然, 也可以假设公司会同时结合第 t 期和 $t-1$ 期的信息确定 y_t^* :

$$y_t^* = \alpha + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1}$$

此时, (3) 将转变为如下形式:

$$y_t = \alpha_0 + \theta y_{t-1} + \gamma_0 x_t + \gamma_1 x_{t-1} + v_t$$

部分调整模型：应用

部分调整模型经常应用于

- 资本结构调整、现金持有行为 (Venkiteshwaran, V. (2011, PDF))，
  - Flannery and Rangan (2006, PDF) 采用了 (1) 的设定方式来研究公司的资本结构调整速度。
- 银行资本充足率 (Baik et al. (2022, PDF))，汇率调整等问题的研究。
- Flannery and Hankins (2013, PDF) 对此类模型及其估计方法进行了系统的评述。

此外，我们也可以把部分调整模型与理性预期模型结合起来。

理性预期模型

$$y_t = \alpha + \beta\left({}_t x_{t+1}^e\right) + u_t \quad (1)$$

根据理性预期假设 (见 Pesaran (1987c)), x_{t+1}^e 定义如下:

$${}_t x_{t+1}^e = E\left(x_{t+1} \mid \Omega_t\right) \qquad (2)$$

其中, Ω_t 表示在 t 时点上可以获得的所有信息的集合, 简称「信息集」。

${}_t x_{t+1}^e$ 的含义： 基于第 t 时点上的信息集 Ω_t 形成的对变量 x 在第$t+1$ 时点的预期值。

假设: $\Omega_t = \{x_t, x_{t-1}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\}$ 。同时, 假设 x_t 服从 $AR(2)$ 过程:

$$x_t = \mu_1 x_{t-1} + \mu_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

则

$$_t x_{t+1}^e = \mu_1 x_t + \mu_2 x_{t-1} \quad (3)$$

将 (3) 代人 (1), 可得:

$$y_t = \alpha + \beta \left(\mu_1 x_t + \mu_2 x_{t-1}\right) + u_t$$

或

$$y_t = \alpha + \theta_1 x_t + \theta_2 x_{t-1} + u_t$$

其中, $\theta_1 = \beta \mu_1, \theta_2 = \beta \mu_2$ 。

理性预期模型：扩展 1

$$y_t = \alpha + \beta\left({}_t x_{t+1}^e\right) + u_t \quad (1)$$

其一, 可以在 (1) 式进一步加入其他变量的预期值, 如 ${}_t z_{t+1}^e$

- 例如，若 y_t 表示工资, x_t 和 z_t 可以分别表示失业率 $\left(ue_t\right)$ 和通胀率 $\left(\pi_t\right)$, 则 (1-21) 式可表示为:

$$y_t = \alpha + \beta_1\left({}_t ue_{t+1}^e\right) + \beta_2\left({}_t \pi_{t+1}^e\right) + u_t$$

- 又如, 设 $z_{t+1}^e = {}_t x_{t+2}^e$, 则

$$y_t = \alpha + \beta_1\left({}_t x_{t+1}^e\right) + \beta_2\left({}_t x_{t+2}^e\right) + u_t$$

在利率期限结构理论中, 预期理论便认为当前的利率水平决定于投资者对 未来不同期限的债券的收益率的预期。

理性预期模型：扩展 2

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha + \beta\left({}_t x_{t+1}^e\right) + u_t & (1)\\
{}_t x_{t+1}^e &= E\left(x_{t+1} \mid \Omega_t\right) & (2)\\
{}_t x_{t+1}^e &= \mu_1 x_t + \mu_2 x_{t-1} & (3)
\end{aligned}
$$

其二, 我们可以将 (3) 式设定为更一般化的 $AR(p)$ 形式。

- 例如, 对 于季度数据, 可以设定 $p = 4$;
- 或对于序列相关较为强烈的变量 (如财政支 出、研发支出等), 即便是年度数据, 我们依然可以将 p 设定为 3 或更大的 数值。

理性预期模型：扩展 3 - 包含内生变量当期预期值的模型

有些情况下, y_t 的预期值是影响 y_t 的一个重要因素,

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha + \beta\left({}_{t-1}y_t^e\right) + \gamma x_t + u_t, \quad \beta \neq 1, \\
&= \alpha + \beta E\left(y_t \mid \Omega_{t-1}\right) + \gamma x_t + u_t.
\end{aligned}
$$

经过一些简单推导，可得:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\gamma\beta}{1-\beta}\left(\mu_1 x_{t-1} + \mu_2 x_{t-2}\right) + \gamma x_t + u_t \\
&= \theta_0 + \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \gamma x_t + u_t
\end{aligned}
$$

显然，这是一个典型的 ARDL(1,2) 模型。

> More: Pesaran, M. H. Time series and panel data econometrics[M]. Oxford University Press, 2015. Link, Chp 6.

面板 ARDL 模型

Ditzen, J. **2021**. Estimating long-run effects and the exponent of cross-sectional dependence: An update to `xtdcce2`. **Stata Journal**, 21 (3): 687-707.
Link, PDF1. PDF2, -Slides-

共同相关估计量 (CCE)

考虑如下变系数模型 (Pesaran 2006),

$$\begin{aligned} y_{it} &= \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + u_{it} \\ u_{it} &= \boldsymbol{\gamma}_i' \mathbf{f}_t + e_{it} \end{aligned} \tag{1}$$

- $\mathbf{f}_t$ 是不可观测的共同因子 (common factor),
- γ_i 为异质性因子载荷 (factor loading), α_i 是个体固定效应。
- e_{it} 随机扰动项, 满足独立同分布 (IID) 假设。

进一步假设异质性系数围绕共同均值随机波动, 设定如下:

$$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \sim \text{iid}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_v\right)$$

共同相关估计量(CCE)：MG 估计 (Mean Group)

$$\begin{aligned} y_{it} &= \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + u_{it} \\ u_{it} &= \boldsymbol{\gamma}_i' \mathbf{f}_t + e_{it} \end{aligned} \qquad (1)$$

- CCE 估计量 (Common Correlated Estimator)：
  - 假设 $\mathbf{x}_{it}$ 严格外生，用其截面均值 $\overline{\mathbf{x}}_t$ 近似表示不可观测的共同因子 $\mathbf{f}_t$

$$y_{it} = \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + \boldsymbol{\theta}_i' \overline{\mathbf{x}}_i + u_{it} \qquad (2)$$

  - 则 (2) OLS 估计是一致的 (仅适用于静态模型)
- **基本思想：** 当横截面维度接近无穷大时, 可以用横截面 平均值逐渐消除不可观测的共同因子产生的影响 (Pesaran 2006, p.969)。
- **Stata 实现**：Eberhardt (2012) 编写的 `xtmg`, Ditzen (2018, 2021) 编写的 `xtdcce2` 命令。

动态 CC 模型

考虑如下动态面板模型：

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \alpha_i + \lambda_i y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}_i^{\prime} \mathbf{x}_{it} + u_{it} \\
u_{it} &= \gamma_i^{\prime} \mathbf{f}_t + e_{it}
\end{aligned}
$$

- 其中, 干扰项 u_{it} 存在截面弱相关, $E\left(\lambda_i\right)=\lambda$。
- 此时, 被解释变量的一阶滞后项 $y_{i,t-1}$ 不再是外生的。
- Chudik and Pesaran (2015b) 提出, 如果把滞后因变量和外生变量的截面均值的 p_T 阶滞后项加入模型, 则可以获得一致估计量。其中, 滞后阶数 $p_T=\lfloor\sqrt[3]{T}\rfloor$, 表示对 $\sqrt[3]{T}$ 取整后的数值, 如 $\lfloor\sqrt[3]{100}\rfloor \simeq\lfloor 4.64\rfloor=4$ 。待估方程为

$$
y_{it}=\alpha_i+\lambda_i y_{i,t-1}+\boldsymbol{\beta}_i^{\prime} \mathbf{x}_{it}+\sum_{l=0}^{p_T} \boldsymbol{\delta}_{il}^{\prime} \overline{\mathbf{z}}_{t-l}+e_{it}
$$

其中，$\overline{\mathbf{z}}_t=\left(\bar{y}_{t-1}, \overline{\mathbf{x}}_t\right)$，它可以视为不可观测的共同因子 $\mathbf{f}_t$ 的代理变量。

动态 CC 模型：MG 估计量

$$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i \sim \text{iid}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_v\right)$$

若把 λ_i 和 $\boldsymbol{\beta}_i$ 堆叠放置为 $\boldsymbol{\pi}_i = \left(\lambda_i, \boldsymbol{\beta}_i\right)$，则 MG 估计量为：

$$\widehat{\boldsymbol{\pi}}_{\text{MG}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widehat{\boldsymbol{\pi}}_i$$

- Stata 实现命令：Ditzen (2018, 2021) 编写的 `xtdcce2` 命令。

动态 CC 模型：ECM 表示

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \alpha_i + \lambda_i y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + u_{it} \\
u_{it} &= \gamma_i' \mathbf{f}_t + e_{it}
\end{aligned}
$$

上式可以表示为 **误差修正模型** (ECM) 的形式:

$$
\Delta y_{it} = \phi_i \left(y_{it-1} - \boldsymbol{\theta}_i' \mathbf{x}_{it} \right) + \alpha_i + \boldsymbol{\beta}_i' \Delta \mathbf{x}_{it} + u_{it}
$$

- $\phi_i = (1 - \alpha_i)$： 误差修正的调整速度，预期为负值
- $\left(y_{i,t-1} - \boldsymbol{\theta}_i' \mathbf{x}_{it} \right)$： 误差修正项 (error-correction term)
- $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\beta}_i / \phi_i$： 长期系数 (long-run coefficient)，此处假设具有同质性
- $\boldsymbol{\beta}_i$： 短期动态调整关系，异质

扩展：ARDL (p_y, p_x) 模型

回顾：ARDL $(1,1)$ 模型

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \alpha_i + \lambda_i y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + u_{it} \\
u_{it} &= \gamma_i' \mathbf{f}_t + e_{it}
\end{aligned} \tag{1}
$$

模型 (1) 可以扩展为 ARDL (p_y, p_x) 模型:

$$
y_{i,t} = \mu_i + \sum_{l=1}^{p_y} \lambda_{l,i} y_{i,t-l} + \sum_{l=0}^{p_x} \beta_{l,i} x_{i,t-l} + \sum_{l=0}^{p} \gamma_{i,l}' \overline{\mathbf{z}}_{t-l} + e_{i,t}
$$

个体的 **长期系数** 为:

$$
\hat{\theta}_{\mathrm{CS-ARDL},i} = \frac{\sum_{l=0}^{p_x} \widehat{\beta}_{l,i}}{1 - \sum_{l=1}^{p_y} \widehat{\lambda}_{l,i}}
$$

动态异质性模型

$\mathrm{ARDL}(p, \underbrace{q, q, \ldots, q})$ model

$$y_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} y_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{q} \delta'_{ij} \mathbf{x}_{i,t-j} + u_{it},$$

表示为 **误差修正模型**:

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \phi_i y_{i,t-1} + \beta'_i \mathbf{x}_{it} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda^*_{ij} \Delta y_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{q-1} \delta^{*\prime}_{ij} \Delta \mathbf{x}_{i,t-j} + u_{it},$$

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \phi_i y_{i,t-1} + \boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{it} + \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_{ij}^* \Delta y_{i,t-j} + \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{ij}^{*\prime} \Delta \mathbf{x}_{i,t-j} + u_{it},$$

其中,

$$\phi_i = -\left(1 - \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}\right), \quad \boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=0}^{q} \delta_{ij},$$

$$\lambda_{ij}^* = -\sum_{m=j+1}^{p} \lambda_{im}, j = 1, 2, \ldots, p-1,$$

$$\delta_{ij}^* = -\sum_{m=j+1}^{q} \delta_{im}, j = 1, 2, \ldots, q-1.$$

应用文献

应用文献 - 1

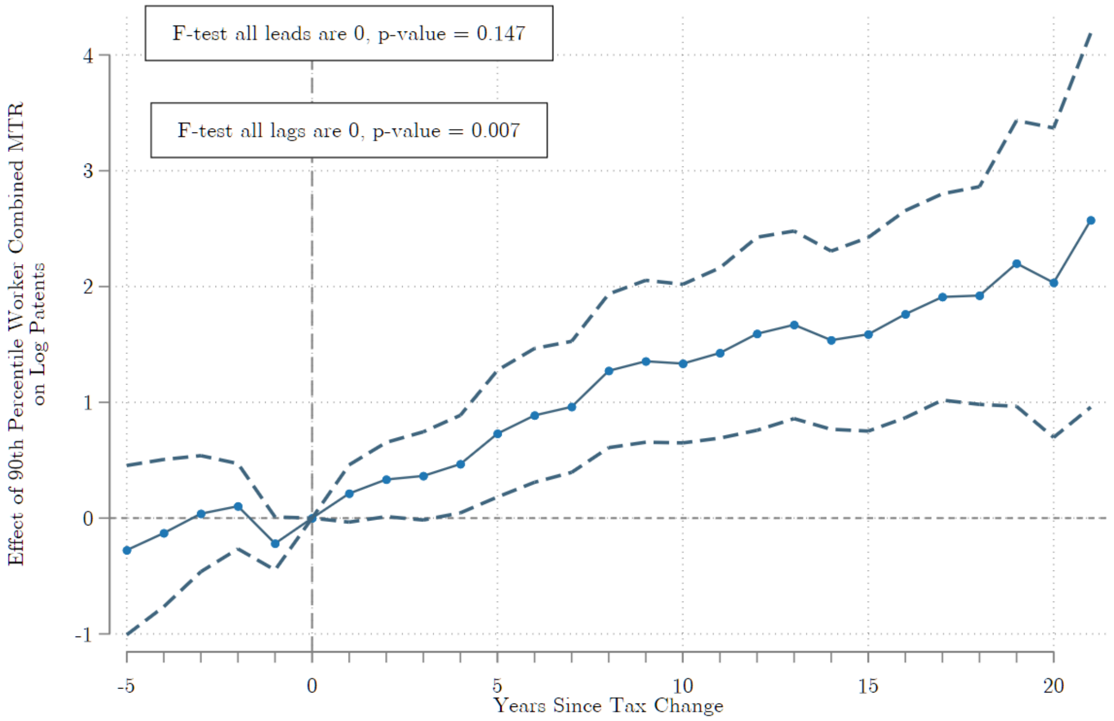
- Aslan, A., E. Dogan, B. Altinoz. 2019, Chapter 4 - single-country versus multiple-country studies[C], in B. Özcan,I. Öztürk eds, Environmental kuznets curve (ekc), Academic Press, 25-36. -Link-, -PDF1-
  - 介绍了环境经济学领域应用 ARDL 模型的文献
- ardl 命令
  - Kripfganz, S., and D. C. Schneider (2022). `ardl` : Estimating autoregressive distributed lag and equilibrium correction models. Manuscript under review by the Stata Journal. -PDF-, -Slides-, Discussion at Statalist
  - `net install ardl, from(http://www.kripfganz.de/stata/)`

应用文献 - 2

- Eberhardt, M., C. Helmers, H. Strauss, **2013**, Do spillovers matter when estimating private returns to r&d?, **The Review of Economics and Statistics**, 95 (2): 436-448. data-codes, xtmg, Appendix, Link, WP version
- Goldberg, J. 2016. "Kwacha gonna do? Experimental evidence about labor supply in rural malawi". American Economic Journal: Applied Economics, 8 (1): 129-149. Link, Link, PDF, Replication
  - OLS 估计工资弹性，简单使用了 ARDL 模型，主要是解释变量的滞后项
- Ahmed, W. M. A., **2020**, Stock market reactions to domestic sentiment: Panel cs-ardl evidence, **Research in International Business and Finance**, 54: 101240. -Link-, -PDF-, Replication

应用文献 - 3

- Akcigit, U., J. Grigsby, T. Nicholas, S. Stantcheva, **2022**, Taxation and innovation in the twentieth century, **Quarterly Journal of Economics**, 137 (1): 329-385. -Link-, -PDF-, -Appendix-, -cited-, -Replication-



参考文献

参考文献-1

- Hansen B E . 2021. Econometrics. Princeton University Press. Data and Contents, PDF, Sec 14.41-43.
    - 介绍了 ARDL 的基本设定和长期效应的估算公式。
- Pesaran, M. H. Time series and panel data econometrics[M]. Oxford University Press, 2015. Link.
    - 该书第 6 章提供了此类模型的理论基础，也讲解了部分调整模型、各类理性预期模型与 ARDL 之间的关系。
- Ghysels, E., M. Marcellino, 2018, Applied economic forecasting using time series methods, Oxford University Press. -Link-, PDF, -Codes-R-Eviews, -Replication-

参考文献-2

- Levendis, J. D. Time series econometrics: Learning through replication[M]. Springer, 2019. -Link-, -PDF1-, PDF2
- Levendis, J.D. (2018). Cointegration and VECMs. In: Time Series Econometrics. Springer Texts in Business and Economics. Springer, Cham. Link,PDF.
  - 本章介绍了误差修正模型的经济含义和推导过程，是理解 ARDL 模型中长期和短期关系的基础。
- Kahn, M. E., K. Mohaddes, R. N. C. Ng, M. H. Pesaran, M. Raissi,J.-C. Yang, 2021, Long-term macroeconomic effects of climate change: A cross-country analysis, Energy Economics, 104: 105624. -Link-, -PDF1-, -PDF2-, -Replication-, Cited.
  - 这是 Panel-ARDL 模型目前最主流的用法。

- Stata 命令： `ardl` , `dynardl` , `xtdcce2` , `reghdfe`

参考文献-3

- Ditzen, J. **2021**. Estimating long-run effects and the exponent of cross-sectional dependence: An update to `xtdcce2`. **Stata Journal**, 21 (3): 687-707. Link, PDF1. PDF2, -Slides-. PPT 中主要模型的 Stata 实现

Thanks

lianxh.cn